Απ1 No. Date 17/1/18

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Αν $f: I \to \mathbb{R}$ διαφορ. $\Rightarrow f': I \to \mathbb{R}$ ορίζει μια νέα συνάρτηση.
Αν f' διαφορ. στο I, λέμε ότι η f είναι 2 φορές διαφορίσιμη στο I με δεύτερη παράγωγο την $f''(x)=(f')'$ κ.ο.κ. Συμβολ: $f^{(n)}(x)$ η n-οστή παραγ. της f.

- f διαφορ. στο $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0)\ \exists$
- f 2 φορές διαφορ. στο $x_0 \Leftrightarrow f$ διαφορ. σε μια γειτονιά του x_0
  f' » » »

- Έστω f έχει $n \geq 2$ παραγώγους στο x_0 (άρα η f έχει n παραγώγους σε μια γειτονιά του x_0)

Απόδειξη
Θεωρείστε το εξής πολυώνυμο n βαθμού

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$P_n(x_0) = f(x_0)$

$$P_n'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$\rightsquigarrow P_n'(x_0) = f'(x_0)$
$P_n''(x_0) = f''(x_0)$

Ισχύει $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall k=0,\dots,n$

* Παράγωγος μηδενικής τάξης είναι η ίδια η συνάρτηση

Σχόλια: - Αναμένουμε η συνάρτηση διαφοράς $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ να είναι πολύ μικρή σε μια γειτονιά του x_0
Αφού $R_n(x_0) = 0$, $R_n'(x_0) = 0 \dots R_n^{(n)}(x_0) = 0$

No. Date

ν-οστός όρος πολυωνύμου Taylor: $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Θεώρημα Taylor

Έστω $n\in\mathbb{N}$, $I=[a,b]$, $f: I\to\mathbb{R}$ τ.ω. $f', f'', \dots, f^{(n)}$ συνεχής στο I και $f^{(n+1)}$ $\exists$ στο (a,b). Εαν $x_0\in I$, τότε $\forall x\in I$ $\exists\, c$ μεταξύ x και x_0 τέτοιο ώστε:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

- η σχέση ισχύει για κάθε $x\in I$
- Είναι γενίκευση του Θ.Μ.Τ. (για $n=0$)

Απόδειξη

Έστω x_0, x δεδομένα και J το κλειστό διάστημα με άκρα τα x, x_0

Στο J ορίζουμε $F(t)=f(x)-f(t)-(x-t)f'(t)-\dots-\dfrac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$, $t\in J$

Ισχύει $F'(t)=-\dfrac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)$

γιατί $F'(t)=-f'(t)+f'(t)-(x-t)f''(t)+(x-t)f''-\dfrac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\dots$
$\dots+\dfrac{(x-t)^n}{(n-1)!}f^{(n)}(t)-\dfrac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)$

Ορίζουμε $G(t)=F(t)-\left(\dfrac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1}F(x_0)$ $t_0\in J$

Τότε $G(x_0)=G(x)=0$. (διότι $F(x)=0$)

Έχω ότι η G είναι συνεχής στο κλειστό και επίσης διαφορ. στο ανοιχτό.

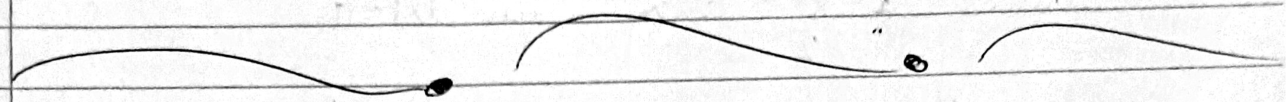
Άρα από Θ.Rolle $\exists\, c$ ανάμεσα σε x, x_0 τ.ω.

$0=G'(c)=F'(c)+(n+1)\dfrac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}F(x_0)$.

Άρα $F(x_0) = -\frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}F'(c) =$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}\cdot\frac{(x-c)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

- Έπειτα στον τύπο της F θέτω $t=x_0$
- Για $t=x_0$ είναι το ανάπτυγμα Taylor n-οστού βαθμού για την f.



Παράδειγμα: $f(x)=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots +$$

πολυώνυμο με κέντρο το x_0

$$+ f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

*Επιλέγω ένα κέντρο και κοιτάω πόσες παράγωγοι υπάρχουν.

$x_0=0$

$f(0)=1$

$f'(0)=0$

$f''(0)=-1$

$f'''(0)=0$

Βρείτε $P_2(x)$ με κέντρο $x_0=0$

$P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ Θ. Taylor $\rightsquigarrow$ $\cos x = P_2(x) + R_2(x) =$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3$$

Άρα ισχύει $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\sin c \cdot x^3}{6}$ για κάποιο $c=c_x$ μεταξύ x και 0, $\forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Εαν $0 \le x \le \pi \rightsquigarrow 0 < c < \pi \rightsquigarrow \sin c > 0$.

έπεται ότι $c \in (0, x)$

$\xrightarrow{(1)} \cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in [0, \pi]$

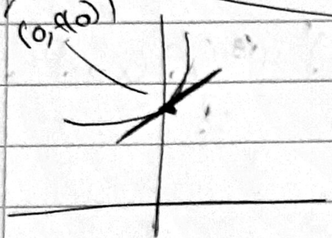
Εαν $-\pi \le x \le 0 \rightsquigarrow -\pi < c < 0 \rightsquigarrow \sin c < 0$

$\underset{x \le 0}{\overset{(1)}{\rightsquigarrow}} \cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in [-\pi, 0]$

Συνεπώς $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x$ εαν $|x| \le \pi$

εαν $|x| \ge \pi \rightsquigarrow 1 - \frac{x^2}{2} < -3 < -1 \le \cos x$

Παράδειγμα:



f' συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f''(x) \exists \ \forall x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Ν.δ.ο. η f είναι πάνω από την εφαπτομένη της στο $(0, f(0))$

Μπορώ να κάνω Θ.Taylor μέχρι τάξης (1).

Από Θ.Taylor: $f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{\overset{\ge 0}{f''(c)}}{2} \overset{\ge 0}{x^2}$ με c ανάμεσα σε 0 και x

Ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$

Το ενδιαφέρον βρίσκεται κοντά στο 0.

Το πολυώνυμο Taylor 1ης τάξης είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της f που διέρχεται από το σημείο $(0, f(0))$

- Τοπικά ακρότατα της f

Κοιτάμε που η f' μηδενίζεται

Έστω $f'(x_0) = 0$

Test 2ας παραγώγου: Αν $f''(x_0) < 0 \rightsquigarrow f$ έχει τοπικό μέγιστο στο x_0

Για x_0 εσωτερικό σημείο

Αν $f''(x_0)>0 \rightsquigarrow f$ έχει τοπικό ελάχιστο

Αν $f''(x_0)=0$ δεν εκφέρω συμπέρασμα

Τοπικά Ακρότατα.

Θεώρημα: Έστω I διάστημα και x_0 εσωτερικό σημείο του I, και $n\geq 2$. Υποθ. ότι $f', f'', \dots, f^{(n)}$ $\exists$ και είναι συνεχείς σε μια γειτονιά του x_0 και $f'(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ αλλά $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

1) Εάν n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow f$ έχει σχετικό ελάχιστο στο x_0

2) Εάν n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow f$ έχει σχετικό μέγιστο στο x_0

3) Εάν n είναι περιττός $\Rightarrow f$ δεν έχει ούτε σχετικό ελάχιστο ούτε σχετικό μέγιστο στο x_0

Απόδειξη

Κοντά στο x_0 η f θα είναι (από Taylor)...

ξ κέντρο x_0

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n, \quad c \text{ μεταξύ } 0 \text{ και } x$$

Για (i)

Αν x κοντά στο $x_0 \rightsquigarrow c$ κοντά στο x_0

$\rightsquigarrow f^{(n)}(c)>0$

Παράδειγμα: $h(x) = \sin x + \frac{1}{6}x^3 - x$

$h'(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$

Παρατηρώ ότι $h'(0)=0$. Άρα το $x_0=0$ πιθανώς να είναι τοποθεσία τοπικού ακροτάτου για την h.

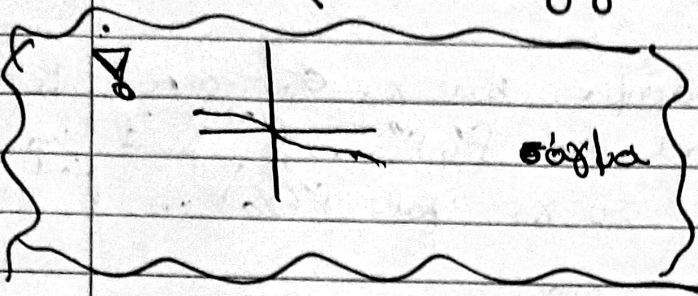
$h''(x) = -\sin x + x$ Βλέπω ότι $h''(0)=0$ (δεν βγάζω συμπέρασμα)

$h'''(x) = -\cos x + 1$ Βλέπω ότι $h'''(0)=0$ (-"-)

$h^{(4)}(x) = \sin x$ Βλέπω $h^{(4)}(0) = 0$ $(- // -)$

$h^{(3)}(x) = \cos x$ Βλέπω $h^{(3)} = 1 > 0$

***Σταματώ όταν η f δεν πληρεί τις προϋποθέσεις ή όταν βρω παράγωγο μη μηδενική.**



Συμπέρασμα: Δεν υπάρχουν ακρότατα αφού έχω Περιττή παράγωγο.

Για Σπίτι: $k(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

$g(x) = \sin x - x$

Για Σπίτι: $\forall x > 0$ $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$

Taylor με κέντρο το μηδέν.